פתרון מועד א'

חדו"א 1מ – אביב תשע"ז

הערות:

- בבחינה היו מספר טורים.
- ייתכנו פתרונות נוספים לאלו המוצגים בקובץ זה.

חלק א – שאלות פתוחות

שאלה מס' 1 (23 נק')

א. (5 נק') צטטו במדויק את משפט ערך הביניים.

משפט ערך הביניים: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ויהי α מספר ממשי כלשהו בין $f(a)$ ל- $f(b)$. אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך שמתקיים: $f(c)=\alpha$.

ב. (10 נק') הוכיחו את משפט ערך הביניים.

הוכחה: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ויהי α מספר ממשי כלשהו בין $f(a)$ ל- $f(b)$, נניח בה"כ כי מתקיים $f(a)<\alpha<f(b)$.

נגדיר פונקציה: $g(x):=f(x)-\alpha$. הפונקציה g רציפה בתחום הסגור $[a,b]$ כחיסור של פונקציות רציפות ומקיימת $g(a)=f(a)-\alpha<0$ וגם $g(b)=f(b)-\alpha>0$. כלומר מתקיים $g(a)\cdot g(b)<0$ ולכן לפי משפט (שנלמד בהרצאה) קיימת נקודה $a<c<b$ עבורה $g(c)=0$.

ובכך הוכחנו כי קיימת נקודה $a<c<b$ עבורה $f(c)=\alpha$. ■

ג. (8 נק') תהא $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(1)=1$ וגם $f'(x)\le 1$.
הוכיחו כי למשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש **<u>בדיוק</u>** פתרון אחד.

הוכחה:

נגדיר פונקציה: $g(x):=f(x)+\sin x-4x$,

נתון כי f היא פונקציה גזירה, ולכן לפי משפט היא גם פונקציה רציפה. כך גם g רציפה וגזירה על כל הישר כחיבור וחיסור של פונקציות רציפות וגזירות.

מהנתון עולה כי $g(0)=1>0$ וכן $g(1)=\sin(1)-3<0$ (כי $|\sin x|\le 1$).

בקטע הסגור $[0\ ,\ 1]$ מצאנו כי $g(0)\cdot g(1)<0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $0<c<1$ עבורה $g(c)=0$. כלומר קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)+\sin x=4x$

לשלילת שורש נוסף נגזור את הפונקציה: $g'(x)=f'(x)+\cos x-4$, מהנתון $f'(x)\le 1$ ומהעבודה כי $\cos x\le 1$ נקבל $g'(x)=f'(x)+\cos x-4\le 1+1-4<0$ ולכן הנגזרת <u>שלילית ממש</u> על כל הישר. לפי מסקנות לגראנז' נסיק כי הפונקציה מונוטונית יורדת <u>ממש</u>, ולכן היא חד-חד ערכית. מהגדרת חח"ע נובע כי לפונקציה יש לכול היותר שורש אחד. ■

שאלה מס 2 (20 נק')

א. (8 נקודות) חשבו את האינטגרל הלא מסויים: $\int e^{-ax}\sin(bx)\,dx$

לכל $a,b>0$ ממשיים

פתרון: נשתמש פעמיים בנוסחת אינטגרציה בחלקים: $\int uv' = uv - \int u'v$

$$\int e^{-ax}\sin(bx)\,dx \xRightarrow[\substack{u=e^{-ax} \quad v=\frac{1}{b}\cos bx \\ u'=-ae^{-ax} \quad v'=\sin bx}]{} -\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx - \frac{a}{b}\int e^{-ax}\cos bx\,dx$$

$$\xRightarrow[\substack{u=e^{-ax} \quad v=\frac{1}{b}\sin bx \\ u'=-ae^{-ax} \quad v'=\cos bx}]{} -\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx - \frac{a}{b}\left[\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx + \frac{a}{b}\int e^{-ax}\sin(bx)\,dx\right]$$

קיבלנו:

$$\int e^{-ax}\sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx - \frac{a}{b^2}e^{-ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{-ax}\sin(bx)\,dx$$

וכעת נותר לחלץ את האינטגרל המבוקש ("כמו משוואה בנעלם אחד")

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{-ax}\sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx - \frac{a}{b^2}e^{-ax}\sin bx$$

$$\Downarrow$$

$$\int e^{-ax}\sin(bx)\,dx = -\frac{b\cos bx + a\sin bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-ax} + C$$

ב. (6 נקודות) עבור אילו ערכי $a,b>0$ האינטגרל המוכלל הבא מתכנס: $\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,dx$

פתרון:

מהחסימות של $\sin(bx)$ מתקיים:

$$\int_0^\infty |e^{-ax}\sin(bx)|dx \le \int_0^\infty e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^\infty = \frac{1}{a} \qquad (\forall \boldsymbol{a}>\mathbf{0})$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה לפונקציות חיוביות, האינטגרל $\int_0^\infty |e^{-ax}\sin(bx)|dx$ מתכנס לכל $a,b>0$ ממשיים

מההגדרה נקבל כי האינטגרל $\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,dx$ מתכנס בהחלט לכל $a,b>0$'

לכן לפי משפט הוא מתכנס.

כלומר, האינטגרל המוכלל מתכנס לכל $a,b>0$.

(ניתן לחשב ישירות ולהראות קיום של גבול **סופי**)

ג. (3 נקודות) חשב את האינטגרל המוכלל עבור ערכי $a,b>0$ שמצאתם בסעיף הקודם:

פתרון:

נשתמש בפונקציה הקדומה שמצאנו בסעיף א':

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{b\cos bx+a\sin bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-ax}\right]\Bigg|_0^t=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\underbrace{-\frac{b\cos bt+a\sin bt}{a^2+b^2}}_{\text{חסומה}}\cdot\underbrace{e^{-at}}_{\text{שואפת לאפס}}+\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\frac{b}{a^2+b^2}$$

כאשר לחישוב הגבול השתמשנו באריתמטיקה ובמשפט "חסומה כפול שואפת לאפס".

ד. (3 נקודות) האם קיימים ערכי $a,b>0$ שעבורם האינטגרל המוכלל שואף ל- ∞ ? נמקו.

פתרון:

הראינו בסעיף ב' כי האינטגרל המוכלל מתכנס לכל $a,b>0$' לכן לא קיימים ערכים עבורם האינטגרל המוכלל שואף ל- ∞.

חלק ב – הוכח או הפרך

בשאלות הבאות אם הטענה נכונה יש להוכיח אותה או במידה ואינה נכונה, יש להפריך על ידי דוגמה נגדית מנומקת היטב.

<u>שאלה מס' 3</u> (7 נקודות)

נתונות שתי פונקציות $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירות המוגדרות בסביבת הנקודה $x=0$ כך שקיים (וסופי) הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ אזי קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

פתרון: הטענה לא נכונה

דוגמה נגדית

$f(x) = x + 1$ ו- $g(x) = x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$ גבול לא קיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1} \equiv 1$$

<u>שאלה מס '4 (7 נק')</u>

נתונות שתי פונקציות זוגיות וגזירות , $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי קיימת נקודה $c \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $f'(c) = g'(c)$

פתרון: הטענה נכונה

נגדיר פונקציה חדשה $h(x) = f(x) - g(x)$, מהנתון כי f, g גזירות נובע כי גם h גזירה כחיסור של פונקציות גזירות,

וכן נובע כי h היא פונקציה זוגית כי: $h(-x) = f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x) = h(x)$.

ניתן לבחור נקודה שרירותית, למשל $h(1) = h(-1)$, ואז הפונקציה רציפה בקטע $[-1,1]$, וגזירה בקטע $(-1,1)$ ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $c\in(-1,1)$ כדש $h'(c) = 0$, ולכן קיימת נקודה שבה $f'(c) = g'(c)$ ■

שאלה מס ' 5 (7 נק')

אם הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות במובן הרחב, אזי גם $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב

פתרון: הטענה לא נכונה

דוגמה נגדית: $a_n=(-1)^n/n$ ו- $b_n=n$ אשר שתיהן מתכנסות במובן הרחב, אולם לסדרה $a_nb_n=(-1)^n$ כמובן לא קיים גבול (אפילו במובן הרחב)

שאלה מס ' 6 (7 נק')

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור אי שלילי המקיים $a_{n+1} \le a_n/3$ לכל n , אזי הטור מתכנס

פתרון: הטענה נכונה

מהנתון $a_{n+1} \le a_n/3$ נשים לב כי באופן אינדוקטיבי מתקיים:

$$a_2 \le \frac{a_1}{3}$$

$$a_3 \le \frac{a_2}{3} \le \frac{a_1}{3\cdot 3}$$

$$a_4 \le \frac{a_3}{3} \le \frac{a_1}{3\cdot 3\cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_n \le \frac{a_1}{3^{n-1}}$$

מאחר ונתון כי הסדרה אי שלילית, נוכל לבצע את מבחן ההשוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{3^{n-1}}$.

זהו טור הנדסי עם $a_1 \ge 0$ ומנה $q=1/3<1$ ולכן הוא טור מתכנס. ■

חלק ג – שאלות אמריקאיות

שאלה מס '7 (5 נק')

הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{27^{n+1}n^{3n}}{(3n+1)^{3n}}$ שווה

1. 0
2. $\frac{27}{e}$
3. לא קיים
4. $\frac{3}{\sqrt[3]{e}}$
5. 1

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{27^{n+1}n^{3n}}{(3n+1)^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{27(3n)^{3n}}{(3n+1)^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{27}{(1+\frac{1}{3n})^{3n}}=\frac{27}{e}$$

שאלה מס '8 (5 נק')

נתונה הפונקציה $f(x)=ln(1+e^x)-x$ אזי

1. f חסומה מלעיל ב R
2. f מקבלת מינימום ב R
3. $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\lim_{x\to-\infty}f(x)$
4. $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס
5. $\int_0^1\frac{f(x)}{x^2}dx$ מתכנס

פתרון:

מתקיים: $f(x)=\ln(1+e^x)-\ln(e^x)=\ln(1+e^{-x})$

מאריתמטיקה מתקיים $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ ולכן הפונקציה אינה חסומה מלעיל.

כמו כן $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ ולכן גם תשובה 4 נפסלת

כמו כן, מתקיים $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{1+e^{x}} < 0$ ולכן הפונקציה מונוטונית יורדת ממש. הפונקציה לא מקבלת מינימום בגלל הגבולות שחישבנו קודם והמונוטוניות.

נבדוק את האינטגרלים המוכללים עבור $\int_0^\infty f(x)\,dx$ נבצע את מבחן ההשוואה הגבולי עם הפונקציה e^{-x} אשר האינטגרל המוכלל שלה מתכנס בקרן $[0,\infty)$, ולכן תשובה 3 נכונה.

באשר לתשובה 5 – בקטע $[0,1]$ ניתן לבצע את מבחן ההשוואה הגבולי עם הפונקציה $1/x^2$ אשר האינטגרל המוכלל שלה מתבדר, ולכן גם האינטגרל הנתון.

<u>שאלה מס 9 (5 נק')</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ הוא טור טיילור של הפונקציה:

1. e^x
2. $\ln(1+x)$
3. $\frac{1}{1-x}$
4. $\frac{1}{(1-x)^2}$
5. $-\ln(1-x^2)$

פתרון:

<u>דרך 1</u>:

פולינומי טיילור סביב האפס (מקלורן) של הפונקציות $\ln(1+x)$, e^x ו- $\frac{1}{1-x}$ נלמדו בהרצאות ובתירגולים. את האחרים קל לפתח.

<u>דרך 2</u>:

נתבונן בטור ההנדסי $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ע"י גזירת שני האגפים (בתחום ההתכנסות) נקבל את התשובה המבוקשת.

<u>דרך 3</u>:

ביצוע אינטגרציה איבר איבר לפונקציה בתחום ההתכנסות.

x

שאלה מס' 10 (5 נק')

יהא $a > 0$ ממשי נתון. ערכו של האינטגרל $\int_{-a}^{a} x^{2017}\sqrt{a^2-x^2}dx$ הוא:

1. 0
2. $\frac{\pi a^2}{2}$
3. $2a$
4. 1
5. לא ניתן לחשב

פתרון:

מדובר באינטגרל של פונקציה אי זוגית בתחום סימטרי. לפי משפט האינטגרל שווה ל-0 .

(ניתן לבדוק ישירות על ידי ההצבה $t=\sqrt{a^2-x^2}$ אשר מניבה גבולות אינטגרציה אפסיים)

שאלה מס' 11 (5 נק')

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי **בהכרח**

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{|a_n|}$ מתכנס
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{\sqrt{n}}$ מתכנס
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ מתכנס
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2+1}$ מתכנס

פתרון:

פסילת תשובה 1 : מאחר והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, לפי משפט $\lim a_n = 0$ ולכן לפי משפט $\lim|a_n| = 0$.

מאריתמטיקה $\lim(1/|a_n|) = \infty$ ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{|a_n|}$ בהכרח מתבדר (האיבר הכללי לא שואף לאפס).

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ הוא טור לייבניץ' מתכנס והמהווה דוגמא נגדית טורים ב- 2-4

הוכחת תשובה 5 : נסתכל על הטור האי שלילי הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n^2+1}\right|$.

מאחר והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, לפי משפט $\lim a_n = 0$ ולכן לכל $\varepsilon<0$ קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n|<\varepsilon$.

בפרט עבור $\varepsilon=1$ כלומר, החל ממקום מסויים $|a_n|<1$

כעת, לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם הסדרה $b_n = 1/n^2$ הטור מתכנס בהחלט ולכן גם מתכנס.

<u>שאלה מס 12 (5 נק')</u>

תהא a_n סדרה הנתונה ע"י $a_1 = 1; a_{n+1} = \frac{4}{a_n}$ אזי

1. a_n מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$
2. $\sup\{a_n\} = \inf\{a_n\} + 3$
3. a_n מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = -2$
4. $\sup\{a_n\} + \inf\{a_n\} = 3$
5. $\sup\{a_n\} - \inf\{a_n\} = 5$

פתרון:

נבדוק מספר איברים בסדרה $\{1, 4, 1, 4, 1, \dots\}$.

קיימות שתי תתי סדרות: $a_{2k} = 4$ ו- $a_{2k+1} = 1$.

לכן לא קיים לסדרה גבול, ואז $\max\{a_n\} = \sup\{a_n\} = 4$, $\min\{a_n\} = \inf\{a_n\} = 1$.
כלומר, תשובה 2 היא נכונה.